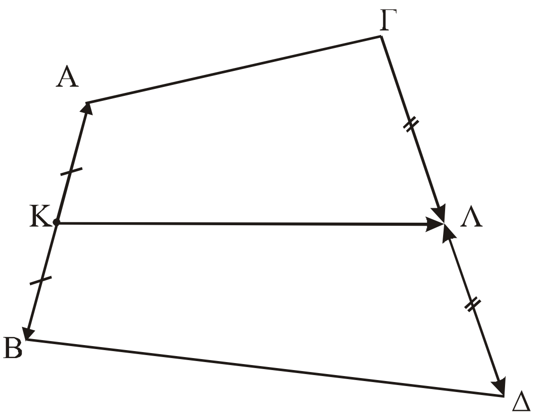
Ι. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

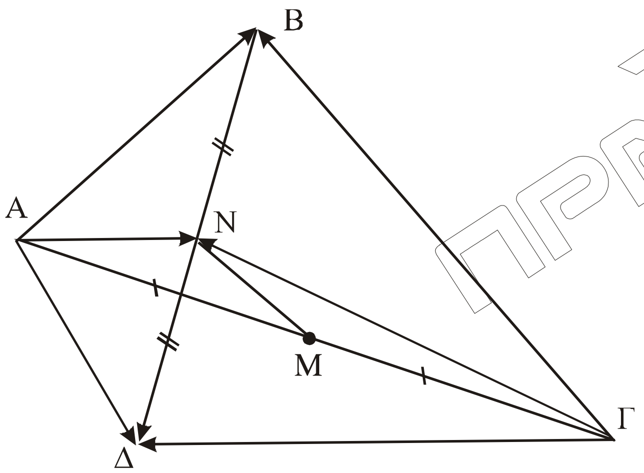


1) ***Δίνονται τα διανύσματα*** $\vec{AB}, \vec{\Gamma\Delta}$ ***και Κ, Λ μέσα αυτών. Ν.δ.ο.*** $\vec{K\Lambda} = \dfrac{\vec{A\Gamma}+\vec{B\Delta}}{2}$.

<u>Λύση :</u>

Δημιουργούμε διαδρομές για το $\vec{K\Lambda}$:

$$\left.\begin{aligned}\vec{K\Lambda} &= \vec{KA}+\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma\Lambda}\\ \vec{K\Lambda} &= \vec{KB}+\vec{B\Delta}+\vec{\Delta\Lambda}\end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} 2\vec{K\Lambda} = \cancel{\vec{KA}}+\cancel{\vec{KB}}+\vec{A\Gamma}+\vec{B\Delta}+\cancel{\vec{\Gamma\Lambda}}+\cancel{\vec{\Delta\Lambda}} \Rightarrow \boxed{\vec{K\Lambda} = \dfrac{\vec{A\Gamma}+\vec{B\Delta}}{2}}$$



2) Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ Μ, Ν μέσα των ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα

ν.δ.ο. $\vec{AB}+\vec{\Gamma B}+\vec{\Gamma\Delta}+\vec{A\Delta} = 4\vec{MN}$.

<u>Λύση:</u>

Χρησιμοποιούμε την διάμεσο τριγώνου :

$$\left.\begin{aligned}\overset{\Delta}{AB\Delta}&: \vec{AB}+\vec{A\Delta} = 2\vec{AN}\\ \overset{\Delta}{B\Gamma\Delta}&: \vec{\Gamma B}+\vec{\Gamma\Delta} = 2\vec{\Gamma N}\end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \vec{AB}+\vec{A\Delta}+\vec{\Gamma B}+\vec{\Gamma\Delta} =$$

$$= 2\left(\vec{AN}+\vec{\Gamma N}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{AB}+\vec{A\Delta}+\vec{\Gamma B}+\vec{\Gamma\Delta} = -2\left(\vec{NA}+\vec{N\Gamma}\right) \Rightarrow$$

$$\overset{\left(\text{ΔΙΑΜΕΣΟΣ } \overset{\Delta}{AN\Gamma}\right)}{\Rightarrow} \vec{AB}+\vec{A\Delta}+\vec{\Gamma B}+\vec{\Gamma\Delta} = -2\cdot 2\vec{NM} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{AB}+\vec{A\Delta}+\vec{\Gamma B}+\vec{\Gamma\Delta} = 4\vec{MN}}$$

---

3) Για τα διανύσματα $\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{P\Gamma}$ ***ισχύει*** $3\vec{PA} - 5\vec{PB} + 2\vec{P\Gamma} = \vec{0}$ ***(1)***
Ν..δ.ο. Α. Β, Γ είναι συνευθειακά.

Λύση :

Χρησιμοποιούμε διανυσματικές ακτίνες.

$$(1) \Rightarrow 3\vec{PA} - 3\vec{PB} - 2\vec{PB} + 2\vec{P\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow 3\left(\vec{PA} - \vec{PB}\right) + 2\left(\vec{P\Gamma} - \vec{PB}\right) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$3\vec{BA} + 2\vec{B\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow 3\vec{BA} = -2\vec{B\Gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{BA} = \frac{2}{3}\vec{\Gamma B}} \text{ άρα :}$$

$\vec{BA} // \vec{\Gamma B}$ και επειδή Β κοινό γράμμα Α, Β, Γ συν/κά.

---

4) Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ με διανυσματικές ακτίνες $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta},\ 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}, 4\vec{\alpha} - 7\vec{\beta}$ ***είναι συνευθειακά.***

<u>Λύση :</u>

Δημιουργώ 2 διανύσματα ως διαφορά δ. ακτίνων.

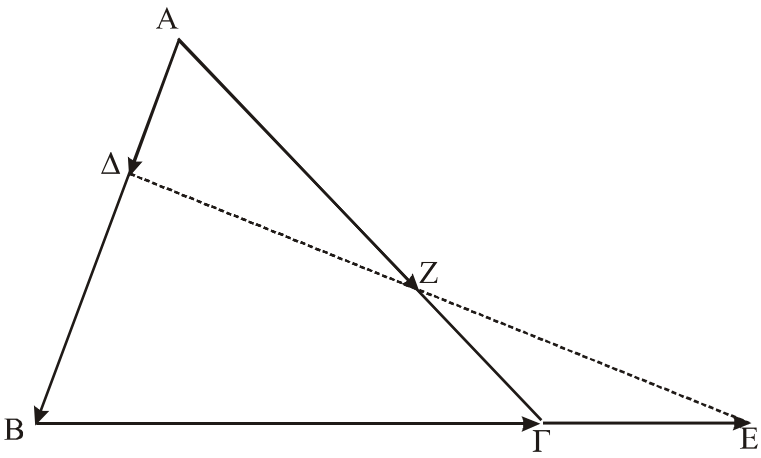
$$\vec{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$$

$$\vec{OB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$$

$$\vec{O\Gamma} = 4\vec{\alpha} - 7\vec{\beta}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} \\ \vec{A\Gamma} &= \vec{O\Gamma} - \vec{OA} = 4\vec{\alpha} - 7\vec{\beta} - \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = 3\vec{\alpha} - 9\vec{\beta} \end{aligned}\right\} \text{άρα}$$

$\vec{A\Gamma} = 3\vec{AB}$ άρα $\vec{A\Gamma} // \vec{AB}$ άρα Α, Β, Γ συν/κά.



5) Δίνεται τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και Δ, Ε, Ζ τέτοια ώστε :

$$\vec{A\Delta}=\frac{1}{3}\vec{AB},\ \vec{\Gamma E}=\frac{1}{2}\vec{B\Gamma},\ \vec{AZ}=\frac{3}{5}\vec{A\Gamma}.$$

α) Αν $\vec{AB}=\vec{\alpha}$ και $\vec{A\Gamma}=\vec{\beta}$ να εκφράσετε τα $\vec{\Delta E},\vec{\Delta Z}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να δείξετε ότι τα Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

<u>Λύση :</u>

α)

$$\vec{\Delta E}=\vec{\Delta B}+\vec{BE}$$

$$\vec{\Delta E}=\frac{2}{3}\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma E}$$

$$\vec{\Delta E}=\frac{2}{3}\vec{\alpha}+\vec{B\Gamma}+\frac{1}{2}\vec{B\Gamma}$$

$$\vec{\Delta E}=\frac{2}{3}\vec{\alpha}+\frac{3}{2}\left(\vec{BA}+\vec{A\Gamma}\right)$$

$$\vec{\Delta E}=\frac{2}{3}\vec{\alpha}+\frac{3}{2}\left(-\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)\vec{\alpha}+\frac{3}{2}\vec{\beta}\Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\Delta E}=-\frac{5}{6}\vec{\alpha}+\frac{3}{2}\vec{\beta}}$$

$$\vec{\Delta Z}=\vec{\Delta A}+\vec{AZ}$$

$$\vec{\Delta Z}=-\frac{1}{3}\vec{AB}+\frac{3}{5}\vec{A\Gamma}$$

$$\boxed{\vec{\Delta Z}=-\frac{1}{3}\vec{\alpha}+\frac{3}{5}\vec{\beta}}$$

β) Επειδή δεν είναι φανερή η // των $\vec{\Delta E},\vec{\Delta Z}$ θα αναζητήσω λ ώστε

$$\vec{\Delta E}=\lambda\vec{\Delta Z}\Rightarrow -\frac{5}{6}\vec{\alpha}+\frac{3}{2}\vec{\beta}=\lambda\left(-\frac{1}{3}\vec{\alpha}+\frac{3}{5}\vec{\beta}\right)\Rightarrow\left(-\frac{5}{6}+\frac{\lambda}{3}\right)\vec{\alpha}=\left(\frac{3\lambda}{5}-\frac{3}{2}\right)\vec{\beta}$$

όμως $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$ άρα πρέπει οι συν/στές τους να είναι 0 συγχρόνως γιατί διαφορετικά θα προκύπτει //

άρα $\left.\begin{matrix} -\dfrac{5}{6}+\dfrac{\lambda}{3}=0 \\ \kappa΄ \\ \dfrac{3\lambda}{5}-\dfrac{3}{2}=0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \dfrac{5}{6}=\dfrac{\lambda}{3} \\ \dfrac{3\lambda}{5}=\dfrac{3}{2} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 15=6\lambda \\ 6\lambda=15 \end{matrix}\right\} \lambda=\dfrac{15}{6} \Rightarrow \lambda=\dfrac{5}{2}$

άρα $\boxed{\vec{\Delta E}=\dfrac{5}{2}\vec{\Delta Z}}$, άρα Δ, Ε, Ζ συν/κά.

---

6) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $|\vec{\alpha}|=\dfrac{|\vec{\beta}|}{3}=\dfrac{|\vec{\gamma}|}{4}$ ν.δ.ο. τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι συγραμμικά.

<u>Λύση :</u>

Πρέπει να γνωρίζουμε ότι :

$\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$

$\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|$

άρα $|\vec{\alpha}|=\dfrac{|\vec{\beta}|}{3}=\dfrac{|\vec{\gamma}|}{4}=\lambda>0$

$|\vec{\alpha}|=\lambda,\ |\vec{\beta}|=3\lambda,\ |\vec{\gamma}|=4\lambda$

$$\left.\begin{matrix} \vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha}+\vec{\beta}=-\vec{\gamma} \Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|-\vec{\gamma}|=|\vec{\gamma}|=4\lambda \\ \text{όμως}\quad |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|=\lambda+3\lambda=4\lambda \end{matrix}\right\} \text{άρα}$$

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ δηλαδή $\boxed{\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0} \Rightarrow \vec{\beta}+\vec{\gamma}=-\vec{\alpha} \Rightarrow \left|\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right|=\left|-\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|=\lambda \\ \text{όμως} \quad \left|\left|\vec{\beta}\right|-\left|\vec{\gamma}\right|\right|=\left|3\lambda-4\lambda\right|=\left|-\lambda\right|=\lambda \end{array}\right\} \text{άρα}$$

$\left|\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right| = \left|\left|\vec{\beta}\right|-\left|\vec{\gamma}\right|\right|$ δηλαδή $\boxed{\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}}$

---

7) Δίνονται τα $\vec{\alpha}=(1,-3)$, $\vec{\beta}=(-1,2)$, $\vec{\gamma}=(-1,1)$.

Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$ και κατόπιν να εκφράσετε το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

<u>Λύση :</u>

Πρέπει να γνωρίζουμε ότι $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_{\vec{\alpha}} & y_{\vec{\alpha}} \\ x_{\vec{\beta}} & y_{\vec{\beta}} \end{vmatrix} = 0$.

Θα πρέπει η ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ να είναι $\neq 0$. Πράγματι, D = 1 · 2 – (-1) · (-3) = 2 –3 =
= -1$\neq$ 0.

Για να γραφεί το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ αρκεί να βρούμε κ, λ $\in$R και
$\vec{\gamma}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta} \Rightarrow (-1,1)=\kappa(1,-3)+\lambda(-1,2) \Rightarrow (-1,1)=(\kappa,-3\kappa)+(-\lambda,2\lambda) \Rightarrow (-1,1)=$

$$=(\kappa-\lambda,-3\kappa+2\lambda) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \kappa-\lambda=-1 \\ -3\kappa+2\lambda=1 \end{array}\right|\left.\begin{array}{l}(\cdot 2) \\ \end{array}\right\}+ \quad \begin{array}{r} 2\kappa-2\lambda=-2 \\ -3\kappa+2\lambda=1 \\ \hline -\kappa=-1 \Rightarrow \kappa=1 \end{array}$$

άρα 1 – λ = -1 $\Rightarrow$ λ = 2 , άρα $\boxed{\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}}$.

---

8) Να υπολογιστεί η παράσταση Α = $\vec{\alpha}\vec{\beta}+2\vec{\beta}\vec{\gamma}+3\vec{\gamma}\vec{\alpha}$ αν ισχύει $\left|\vec{\alpha}\right|=3$, $\left|\vec{\beta}\right|=1$,
, $\left|\vec{\gamma}\right|=4$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{o}$.

<u>Λύση :</u>

$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{o}$ $\qquad$ $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{o}$ $\qquad$ $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{o}$

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=-\vec{\gamma}$$
$$\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\left(-\vec{\gamma}\right)^2$$
$$\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=\vec{\gamma}^2$$
$$|\vec{\alpha}|^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2=|\vec{\gamma}|^2$$
$$9+2\cdot\vec{\alpha}\vec{\beta}+1=16$$
$$2\vec{\alpha}\vec{\beta}=6$$
$$\boxed{\vec{\alpha}\vec{\beta}=3}$$

$$\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=-\vec{\beta}$$
$$\left(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right)^2=\left(-\vec{\beta}\right)^2$$
$$\ldots.$$
$$9+2\vec{\alpha}\vec{\gamma}+16=1$$
$$\boxed{\vec{\alpha}\vec{\gamma}=-12}$$

$$\vec{\beta}+\vec{\gamma}=-\vec{\alpha}$$
$$\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)^2=\left(-\vec{\alpha}\right)^2$$
$$\ldots.$$
$$1+2\vec{\beta}\vec{\gamma}+16=9$$
$$\boxed{\vec{\beta}\vec{\gamma}=-4}$$

Άρα Α = 3 + 2 (-4) + 3(-12) = -41.

---

9) Αν $\vec{\alpha}=(2\lambda,4-\lambda),\ \ \vec{\beta}=(4,3)$ ***να βρεθεί το λ∈R ώστε :***

i) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ ***ii)*** $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$ ***iii)*** $\vec{\alpha}\,//\,x'x$ ***iv)*** $\vec{\alpha}\,//\,y'y$

<u>Λύση :</u>

i) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Rightarrow 2\lambda\cdot4+(4-\lambda)3=0\Rightarrow 8\lambda+12-3\lambda=0\Rightarrow 5\lambda=-12\Rightarrow \boxed{\lambda=-\frac{12}{5}}$

ii) $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}\Rightarrow\begin{vmatrix}2\lambda & 4-\lambda\\ 4 & 3\end{vmatrix}=0\Rightarrow 6\lambda-4(4-\lambda)=0\Rightarrow 6\lambda-16+4\lambda=0\Rightarrow 10\lambda=16\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{8}{5}}$

iii) $\vec{\alpha}\,//\,x'x\Rightarrow 4-\lambda=0\Rightarrow\lambda=4$

iv) $\vec{\alpha}\,//\,y'y\Rightarrow 2\lambda=0\Rightarrow\lambda=0$

---

10) Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ ***και*** $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$ ***να βρεθεί η γωνία*** $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$ ***με*** $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$, $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

<u>Λύση :</u>

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{-3}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \text{ , άρα } \left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Διότι :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) =$$
$$= 2\vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} - 4\vec{\beta}^2 =$$
$$= 2\cdot|\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - 4|\vec{\beta}|^2 =$$
$$= 2 + \cancel{2}^{1}\left(-\frac{1}{\cancel{2}_{1}}\right) - 4\cdot 1 = -3$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} =$$
$$= 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}$$

$$|\vec{u}|^2 = \left|2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}\right|^2 \Leftrightarrow$$
$$|\vec{u}|^2 = \left(2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$|\vec{u}|^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 16\vec{\alpha}\vec{\beta} + 16\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow$$
$$|\vec{u}|^2 = 4 - 8 + 16 = 12 \Leftrightarrow$$
$$\text{άρα } |\vec{u}| = \sqrt{12} \Leftrightarrow$$
$$|\vec{u}| = \boxed{2\sqrt{3}} \text{ Ομοίως } |\vec{v}| = \ldots = \boxed{\sqrt{3}}$$

---

11) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 2), \vec{\beta} = (3, -1)$.

i) να βρεθεί η προβολή του $\vec{\beta}$ ***πάνω στο*** $\vec{\alpha}$.

ii) να βρεθεί και η άλλη συνιστώσα του $\vec{\beta}$. ***(ανάλυση σε*** $\perp$ ***συνιστώσες).***

<u>Λύση :</u>

<u>ΣΧΗΜΑ</u>

i) Έστω $\vec{\beta}_1 = \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}_1$ (1) και επειδή $\vec{\beta}_1 // \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\beta}_1 = \lambda\vec{\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{\beta}_1 = (-\lambda,\ 2\lambda)$ άρα η (1) θα γίνεται :

$-1\cdot 3 + 2\cdot(-1) = -1(-\lambda) + 2\cdot(2\lambda) \Rightarrow -3-2 = \lambda + 4\lambda \Rightarrow -5 = 5\lambda \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \vec{\beta}_1 = (1,-2)$

ii) Επειδή $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$ με $\vec{\beta}_2 \perp \vec{\alpha}$ θα έχουμε : $\vec{\beta}_2 = \vec{\beta} - \vec{\beta}_1 \Rightarrow \vec{\beta}_2 = (3,-1)-(1,-2) \Rightarrow$

$\vec{\beta}_2 = (3,-1)+(-1,2) \Rightarrow \boxed{\vec{\beta}_2 = (2,1)}$

---

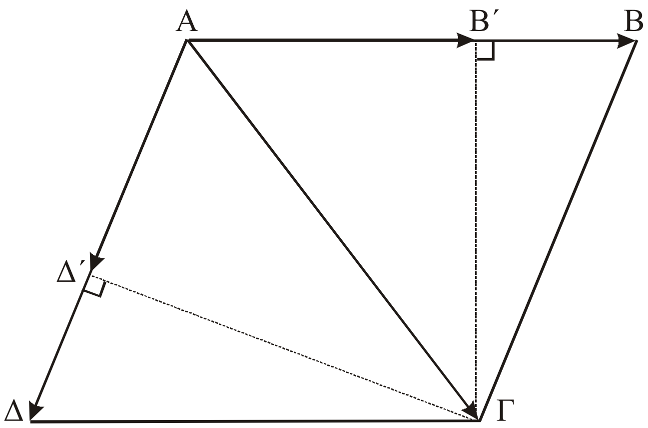
12) Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $\vec{x} = \dfrac{\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{\beta}\right|^2}$, $\vec{y} = \dfrac{\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{\beta}\right|^2} - \vec{\alpha}$ ***είναι κάθετα.***

<u>Λύση :</u>

Επειδή υπάρχει κίνδυνος προσεταιριστικής ιδιότητας θέτω $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \kappa$.

Άρα $\vec{x}\cdot\vec{y} = \left(\dfrac{\kappa}{\left|\vec{\beta}\right|^2}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\left(\dfrac{\kappa}{\left|\vec{\beta}\right|^2}\cdot\vec{\beta} - \vec{\alpha}\right) = \left(\dfrac{\kappa}{\left|\vec{\beta}\right|^2}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\left(\dfrac{\kappa}{\left|\vec{\beta}\right|^2}\cdot\vec{\beta}\right) - \left(\dfrac{\kappa}{\left|\vec{\beta}\right|^2}\cdot\vec{\beta}\right)\vec{\alpha} =$

$= \dfrac{\kappa^2}{\left|\vec{\beta}\right|^4}\cdot\vec{\beta}^2 - \dfrac{\kappa}{\left|\vec{\beta}\right|^2}\cdot\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\right) = \dfrac{\kappa^2}{\left|\vec{\beta}\right|^4}\cdot\left|\vec{\beta}\right|^2 - \dfrac{\kappa}{\left|\vec{\beta}\right|^2}\cdot\kappa = \dfrac{\kappa^2}{\left|\vec{\beta}\right|^2} - \dfrac{\kappa^2}{\left|\vec{\beta}\right|^2} = 0$ άρα $\vec{x}\perp\vec{y}$.



13) Στο #ΑΒΓΔ έστω Β΄, Δ΄ οι προβολές του Γ στις ΑΒ , ΑΔ αντίστοιχα.

Ν.δ.ο. $\vec{AB}\cdot\vec{AB'} + \vec{A\Delta}\cdot\vec{A\Delta'} = \vec{A\Gamma}^2$ **.**

Λύση :

Εσωτερικό γινόμενο συγ/κών διανυσμάτων με κοινή αρχή είναι ένδειξη προβολών.

Έχουμε : ΣΧΗΜΑ

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=\vec{AB}\cdot\vec{AB'}\\ \vec{A\Delta}\cdot\vec{A\Gamma}=\vec{A\Delta}\cdot\vec{A\Delta'}\end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}+\vec{A\Delta}\cdot\vec{A\Gamma}=\vec{AB}\cdot\vec{AB'}+\vec{A\Delta}\cdot\vec{A\Delta'}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\vec{A\Gamma}\left(\vec{AB}+\vec{A\Delta}\right)=\vec{AB}\cdot\vec{AB'}+\vec{A\Delta}\cdot\vec{A\Delta'}\\ AB\Gamma\Delta\ \#\text{άρα}\ \vec{AB}+\vec{A\Delta}=\vec{A\Gamma}\end{array}\right\}\ \boxed{\vec{AB}\cdot\vec{AB'}+\vec{A\Delta}\cdot\vec{A\Delta'}=\vec{A\Gamma}^2}$$

---

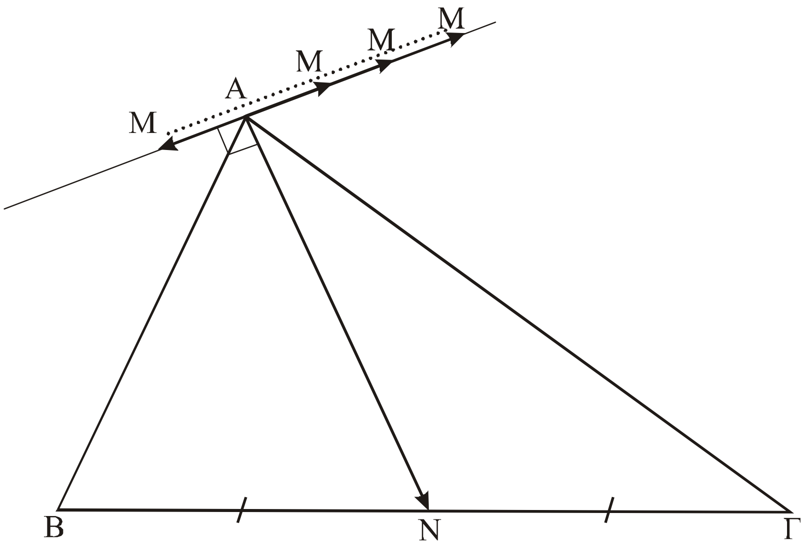
14) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=3,\ |\vec{\beta}|=6$. ***Να βρεθεί πραγματικός λ ώστε τα διανύσματα*** $3\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ και $3\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$ ***να είναι κάθετα.***

Λύση :

Θα πρέπει :

$$\left(3\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right)\cdot\left(3\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow 9\vec{\alpha}^2-\lambda^2\vec{\beta}^2=0\Rightarrow 9\cdot 9-\lambda^2\cdot 36=0\Rightarrow\lambda^2=\frac{81}{36}\Rightarrow$$

$$\sqrt{\lambda^2}=\sqrt{\frac{81}{36}}\Rightarrow|\lambda|=\frac{9}{6}\Rightarrow\boxed{\lambda=\pm\frac{3}{2}}$$



15) Σε τρίγωνο
$\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $\vec{AB}\cdot\vec{AM}+\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AM}=0$ ***Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ.***

<u>Λύση :</u>

$$\vec{AB}\cdot\vec{AM}+\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AM}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\vec{AB}+\vec{A\Gamma}\right)\cdot\vec{AM}=0$$

Όμως αν Ν μέσο της ΒΓ τότε $\vec{AB}+\vec{A\Gamma}=2\vec{AN}$.

Άρα $2\vec{AN}\cdot\vec{AM}=0$ δηλαδή $\vec{AN}\perp\vec{AM}$ άρα το Μ είναι το τέλος ενός διανύσματος το οποίο είναι $\perp$ στην διάμεσο ΑΝ στο Α δηλαδή ανήκει σε ευθεία $\perp$ στην ΑΝ στο Α.