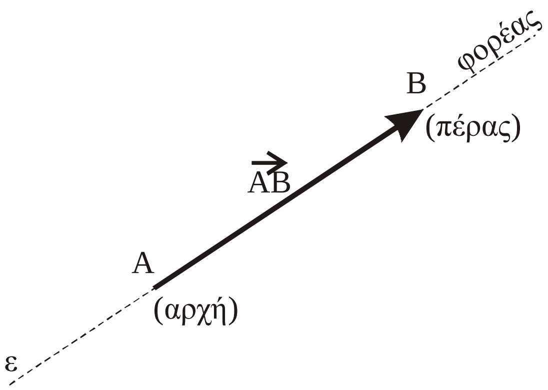
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
(ΘΕΩΡΙΑ – ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ)



1. Τι ορίζεται ως διάνυσμα ;

Το διάνυσμα ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Έτσι το πρώτο άκρο ονομάζεται αρχή (ή σημείο εφαρμογής) ενώ το δεύτερο άκρο ονομάζεται πέρας .

2. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$;

Τα χαρακτηριστικά ενός διανύσματος είναι

α) Το μέτρο (μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ)

β) Ο φορέας του , δηλαδή η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται (δηλ. η ε)

γ) Η φορά δηλαδή ποια είναι η αρχή και πιο το τέλος (Έτσι το $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$)

3. Ποιο είναι το μηδενικό διάνυσμα και πιο το μοναδιαίο ;

Μηδενικό είναι το διάνυσμα στο οποίο η αρχή και το πέρας συμπίπτουν. Συμβολίζεται $\vec{0}$ ή $\overrightarrow{AA}$ ή $\overrightarrow{BB}$ κ.ο.κ. . (Να θυμόμαστε ότι έχει μέτρο 0 ενώ φορά και διεύθυνση ότι επιλέξουμε). Μοναδιαίο είναι το διάνυσμα του οποίου το μέτρο ισούται με 1.

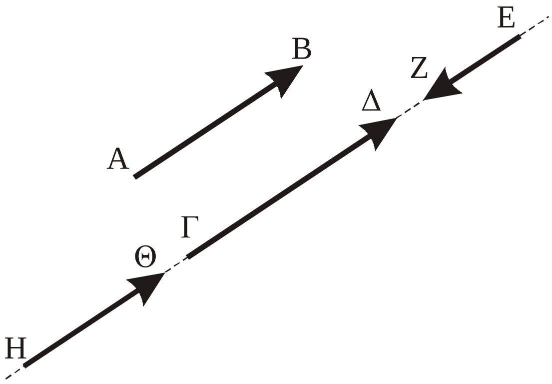
4. Υπάρχει διαφορά μεταξύ φορέα και διεύθυνσης ;

Ο φορέας όπως είπαμε είναι η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα ενώ η διεύθυνση είναι οποιαδήποτε ευθεία // με τον φορέα .

5. Ποια διανύσματα ονομάζονται συγγραμμικά , ποια ομόρροπα και ποια αντίρροπα ;

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με την ίδια διεύθυνση (ίδιο φορέα ή // φορείς) θα λέγονται συγγραμμικά (ή //) .

Δύο μη μηδενικά διανύσματα τα οποία είναι συγγραμμικά και έχουν επιπλέον ίδια φορά (δηλαδή ίδια κατεύθυνση) θα λέγονται ομόρροπα ενώ αν έχουν αντίθετη φορά αντίρροπα (αντίθετη κατεύθυνση)



$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{H\Theta} // \overrightarrow{\Gamma\Delta} // \overrightarrow{EZ}$

Ομόρροπα ($\uparrow\uparrow$) : $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{H\Theta} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

Αντίρροπα ($\uparrow\downarrow$) :
$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{EZ}, \overrightarrow{H\Theta} \uparrow\downarrow \overrightarrow{EZ}, \overrightarrow{\Gamma\Delta} \uparrow\downarrow \overrightarrow{EZ}$

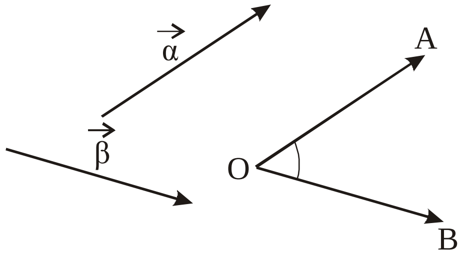
6. Ποια διανύσματα λέγονται ίσα και ποια αντίθετα ;

Δύο διανύσματα τα οποία είναι ομόρροπα με ίδιο μέτρο λέγονται ίσα ενώ αν είναι αντίρροπα με ίσο μέτρο λέγονται αντίθετα .

$\boxed{!}$ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ (δηλαδή αλλαγή της σειράς των γραμμάτων επιφέρει αλλαγή προσήμου)

7. Πως ορίζεται η γωνία δύο διανυσμάτων ;

Έστω 2 μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$ με αρχή ένα κοινό σημείο Ο θεωρούμε δύο διανύσματα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ ώστε να ισχύει $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$.



Γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ (θα συμβολίζουμε ($\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}$) ή ($\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}}$)) θα ονομάζουμε την κυρτή γωνία $A\hat{O}B$ που ορίζουν οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ . Έτσι λοιπόν θα έχουμε $0^o \le (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) \le 180^o$.

(Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ τότε $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 0$, αν $\vec{\alpha} \downarrow\uparrow \vec{\beta}$ τότε $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 180^o$ ενώ αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 90^o$

8. Ορίζονται πράξεις με τα διανύσματα και ποιες είναι αυτές ;

Οι πράξεις μεταξύ των διανυσμάτων είναι : Η πρόσθεση, η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα, ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με διάνυσμα (εσωτερικό γινόμενο, εξωτερικό γινόμενο, μικτό γινόμενο)

Παρατήρηση

Δεν θα ασχοληθούμε με εξωτερικό – μικτό γινόμενο και φυσικά δεν υπάρχει διαίρεση διανυσμάτων

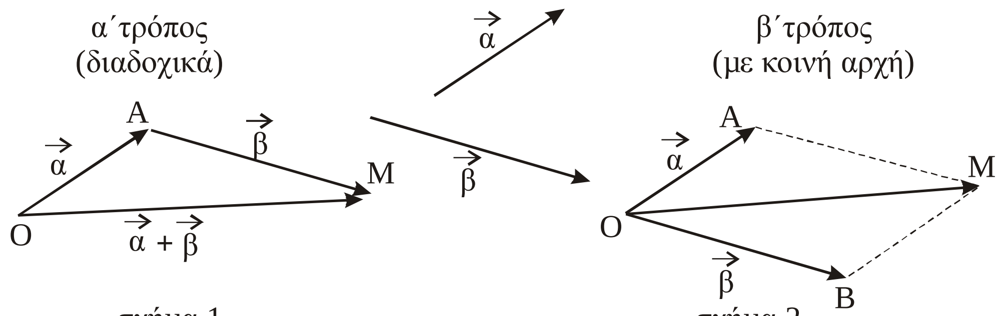
9. Πως ορίζεται η πρόσθεση των διανυσμάτων και ποιες οι ιδιότητές της ;

Έστω δυο διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. Με αρχή το σημείο Ο παίρνουμε διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και στη συνέχεια (διαδοχικά) με αρχή το Α παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{AM}=\vec{\beta}$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται άθροισμα (συνισταμένη) των $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$ (σχ. 1) .

Παρατήρηση

Το άθροισμα μπορούμε να το βρούμε και με το λεγόμενο κανόνα παραλληλογράμμου.

Αν κάνουμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$ να έχουν κοινή αρχή ένα σημείο Ο (δηλαδή $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha},\ \overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$) τότε η διαγώνιος ΟΜ του # που κατασκευάζεται με πλευρές ΟΑ και ΟΒ είναι και πάλι η συνισταμένη (σχ.2) .



σχήμα 1 σχήμα 2

Μεθοδολογία

Πολλές φορές για να αποδείξουμε μια σχέση διανυσμάτων πρέπει να αναλύσουμε κάποια από αυτά. Ένας τρόπος είναι να αναλύσουμε σε άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων πχ.
$\overrightarrow{K\Lambda}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{N\Lambda}$. Φυσικά οι συνιστώσες θα είναι διανύσματα που έχουν « σχέση » με την απόδειξη .

Οι ιδιότητες της πρόσθεσης είναι:

i. Αντιμεταθετική : $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$

ii. Προσεταιριστική : $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$

iii. Ουδέτερο : $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$

iv. Συμμετρικό (αντίθετο) : $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$

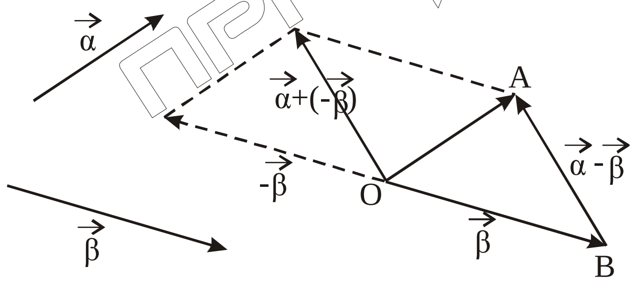
10. Τι ονομάζουμε διάνυσμα θέσεως (διανυσματική ακτίνα) ;

Έστω Ο ένα σταθερό σημείο του επιπέδου . Τότε για κάθε σημείο Μ του επιπέδου το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ θα λέγεται διάνυσμα θέσεως Μ ή διανυσματική ακτίνα του Μ. Έστω το σταθερό σημείο Ο θα λέγεται σημείο αναφοράς .

11. Πως ορίζεται η αφαίρεση των διανυσμάτων και ποιες οι ιδιότητές της ;

Η διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ ορίζεται ως το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ *και* $-\vec{\beta}$.

Δηλαδή $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$. Έχουμε λοιπόν :



Δηλαδή $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

Μεθοδολογία

Αν θεωρήσουμε ένα σημείο αναφοράς Ο τότε μπορούμε να αναλύσουμε οποιοδήποτε διάνυσμα ως διαφορά της διανυσματικής ακτίνας του τέλους του μείον την διανυσματική ακτίνα της αρχής του.

Π.χ. $\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}}=\overrightarrow{\mathrm{O\Lambda}}-\overrightarrow{\mathrm{OK}}$. Αυτό είναι ιδιαίτερα « βολικό » όταν η ανάλυση σε διαδοχικά διανύσματα μιας δίνει μεγάλες σχέσεις .

Οι ιδιότητες της αφαίρεσης είναι:

i. $\vec{\alpha}=\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ (Νόμος διαγραφής)

ii. $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ *και* $\vec{\gamma}=\vec{\delta}\Rightarrow\vec{\alpha}\pm\vec{\gamma}=\vec{\beta}\pm\vec{\delta}$ (πρόσθεση – αφαίρεση σχέσεων)

iii. $\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ (επίλυση εξίσωσης)

Οι σχέσεις i ,ii, δεν περιέχονται στο βιβλίο μας παρόλο που χρησιμοποιούνται συχνά .

Για την iii έχουμε την απόδειξη

$\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha} \Leftrightarrow (-\vec{\beta})+(\vec{\beta}+\vec{x})=(-\vec{\beta})+\vec{\alpha} \Leftrightarrow$

$(-\vec{\beta}+\vec{\beta})+\vec{x}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$

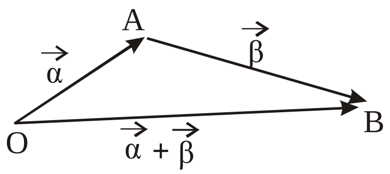
$\vec{0}+\vec{x}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

$\vec{x}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

12. Τι ισχύει για το μέτρο του αθροίσματος $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$;

Από την γεωμετρία και την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$



Παρατήρηση : Με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να δείξουμε ότι:

i. $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$

ii. $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|$

Μεθοδολογία

Οι παραπάνω εξισώσεις i, ii είναι μέθοδος απόδειξης παραλληλίας και εφαρμόζεται όταν τα δεδομένα της άσκησης αναφέρονται μόνο σε μέτρα .

13. Πως ορίζεται ο πολλαπλασιασμός αριθμού λ με ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$;

Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \in \mathbb{R}^*$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Τότε ονομάζουμε γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$ και θα συμβολίζουμε με $\lambda\vec{\alpha}$ ένα νέο διάνυσμα για το οποίο ισχύουν.

α) έχει μέτρο $|\lambda|\cdot|\vec{\alpha}|$

β) $\lambda\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\alpha}$ για $\lambda > 0$ ενώ $\lambda\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\alpha}$ για $\lambda < 0$

Τέλος αν $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0}$ τότε $\lambda\vec{\alpha}=\vec{0}$

14. Ποιες είναι οι ιδιότητες της πράξης αυτής ;

Οι ιδιότητες που ισχύουν είναι οι βασικές

i. $\lambda\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, $\lambda \in IR$

ii. $(\lambda+\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$, λ, μ $\in IR$

iii. $\lambda\left(\mu\vec{\alpha}\right)=(\lambda\mu)\vec{\alpha}$

και οι συνέπειές τους

i. $\lambda\vec{\alpha}=\vec{0} \Leftrightarrow \lambda=0\ \eta\ \vec{\alpha}=\vec{0}$

ii. $\left(-\lambda\vec{\alpha}\right)=\lambda\left(-\vec{\alpha}\right)=-\left(\lambda\vec{\alpha}\right)$

iii. $\lambda\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=\lambda\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$

iv. $(\lambda-\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}-\mu\vec{\alpha}$

v. αν $\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ *και* $\lambda\neq 0$ *τοτε* $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

vi. αν $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ *τοτε* $\lambda=\mu$

15. Τι ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων .

Αν θεωρήσουμε δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και ένα άλλο διάνυσμα $\vec{\gamma}$ παράγεται από αυτά π.χ. $\vec{\gamma}=5\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ τότε θα λέμε ότι το $\vec{\gamma}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Γενικά γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, θα ονομάζουμε κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ όπου κ, λ $\in$ IR.

Σημείωση

Αποδεικνύεται ότι αν $\vec{\alpha}\ \neq\ \vec{\beta}$ τότε το $\vec{v}$ γράφεται κατά **μοναδικό τρόπο** ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. (Αυτή είναι και η ιδέα που οδήγησε τον Καρτέσιο στην κατασκευή των συντεταγμένων) .

16. Πως συμπεραίνουμε ότι δύο διανύσματα είναι // ;

Θεώρημα . Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ όπου λ $\in$IR.

Απόδειξη

ευθύ:

αν $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$. Ορίζουμε τον αριθμό κ = $\dfrac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$ άρα $|\vec{\alpha}| = \kappa \cdot |\vec{\beta}|, \kappa > 0$

Έτσι αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} = \kappa \cdot \vec{\beta}$

Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} = -\kappa \cdot \vec{\beta}$

Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ τότε $\vec{\alpha} = 0 \cdot \vec{\beta}$

Δηλαδή υπάρχει πάντοτε λ (και μάλιστα μοναδικός) έτσι ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$

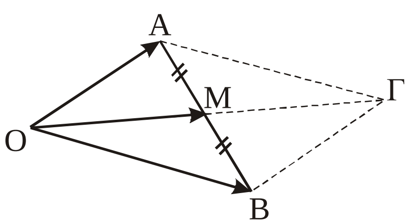
Αντίστροφο:

Εφόσον $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ και $\lambda\vec{\beta} \,//\, \vec{\beta}$ από την πράξη του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα προκύπτει άμεσα ότι και $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta}$.

17. Τι γνωρίζουμε για την διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος ;

Αν ΑΒ ένα τυχαίο τμήμα και Μ το μέσον του , τότε έχουμε (Ο σημείο αναφοράς)

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)}$



Σημείωση:

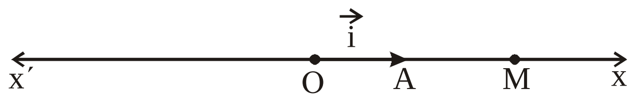
Η παραπάνω σχέση εκφράζει τον κανόνα ≠ αν από τα Α, Β φέρουμε // προς τις ΟΒ, ΟΑ αντίστοιχα, οπότε και το $2\overrightarrow{OM}$ είναι η διαγώνιος $\overrightarrow{O\Gamma}$ δηλαδή η συνισταμένη των $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$

Μεθοδολογία

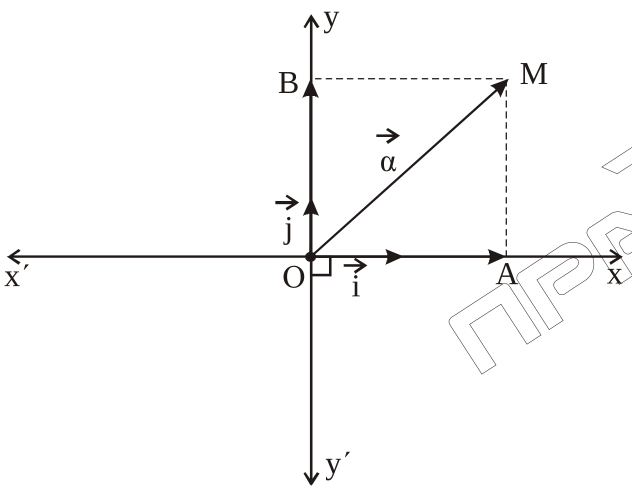
Σε ασκήσεις που στα δεδομένα δίνονται μέσα τμημάτων, σκεφτόμαστε πάντοτε την διανυσματική ακτίνα του μέσου.

18. Τι ονομάζουμε α) άξονα, β) ποιο είναι το ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (Καρτεσιανό επίπεδο) , γ) πως ορίζονται οι συντεταγμένες ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$;

α) Αν πάνω σε μια ευθεία x’x επιλέξουμε 2 σημεία Ο και Α, έτσι ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ να έχει μέτρο 1 και να βρίσκεται στην ημιευθεία ΟΧ τότε λέμε ότι έχουμε ένα άξονα με αρχή Ο και μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{i}$



Είναι φανερό ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ του x’x θα υπάρχει μοναδικός αριθμός x έτσι ώστε $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=x\cdot\overrightarrow{OA}$ δηλαδή $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=x\vec{i}$



β) Αν πάνω στο επίπεδο σχεδιάσουμε δύο κάθετους άξονες x’x και y’y με κοινή αρχή Ο και μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντίστοιχα τότε έχουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

Δηλαδή $|\vec{i}|=|\vec{j}|=\perp$

$\vec{i}\perp\vec{j}$

γ) Αν Μ ένα σημείο του επιπέδου τότε μπορούμε να φέρουμε // στον y’y και στον x’x (από το Μ) που τέμνει στα Α και Β τον x’x και y’y αντίστοιχα. Έχουμε λοιπόν ότι $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (κανόνας #) δηλαδή $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Επομένως τους συντελεστές των $\vec{i},\vec{j}$ δηλαδή τα x,y θα τα ονομάσουμε συντεταγμένες του σημείου Μ αλλά και του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$. Θα γράφουμε Μ(x,y), $\overrightarrow{OM}$ = (x,y).

Το x ονομάζεται τετμημένη , ενώ το y τεταγμένη. Αποδεικνύεται δε ότι οι συντεταγμένες είναι μοναδικές. Πράγματι αν (x’, y’) ήταν ένα άλλο ζευγάρι με x’ ≠ x, y’ ≠ y, τότε για το $\vec{a}$ θα είχαμε

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{i}\\ \vec{a}=x'\vec{i}+y'\vec{j}\end{array}\right\}\Rightarrow x\vec{i}+y\vec{i}=x'\vec{i}+y'\vec{j}\Leftrightarrow(x-x')\vec{i}=(y'-y)\vec{j}\overset{x\neq x'}{\Leftrightarrow}\vec{i}=\frac{y'-y}{x-x'}\vec{j}\Leftrightarrow\vec{i}//\vec{j}\text{ άτοπο αφού}$$

$\vec{i}\perp\vec{j}$

19. Πως χρησιμοποιούμε τις συν/νες στην ισότητα των διανυσμάτων ;

Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες είναι ίσες δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=(a_1,a_2)\\ \vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2)\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{τότε } \vec{\alpha}=\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=\beta_1\\ \alpha_2=\beta_2\end{cases}$$

20. Πως χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες στις πράξεις των διανυσμάτων ;

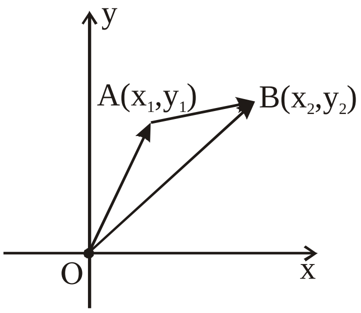
Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε για την πρόσθεση έχουμε $\vec{a}+\vec{\beta}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$, για την αφαίρεση έχουμε $\vec{a}-\vec{\beta}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$, για τον πολλαπλασιασμό αριθμού με διανύσματα έχουμε $\lambda\vec{\alpha}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$ και γενικά για τον γραμμικό συνδυασμό $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2)$

21. Ποιες είναι οι συντεταγμένες μέσου τμήματος ΑΒ;

Αν Α (x_1,y_1) και Β (x_2,y_2) οι συν/νες των άκρων του τμήματος ΑΒ τότε αν Ο το σημείο αναφοράς και Μ (x,y) μέσον ΑΒ , γνωρίζουμε ότι:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow (x,y)=\frac{1}{2}[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] \Leftrightarrow \boxed{(x,y)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)}$$

22. Ποιες είναι οι συντεταγμένες ενός διανύσματος $\overline{AB}$;



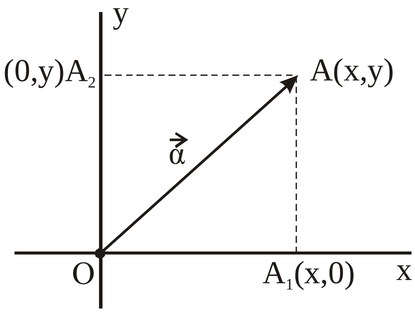
Όταν το διάνυσμα δεν είναι διάνυσμα θέσης (διανυσματική ακτίνα) τότε αναλύεται με την βοήθεια των διανυσματικών ακτινών και οι συντεταγμένες του προκύπτουν αν από την τετμημένη του τέλους αφαιρέσουμε την τετμημένη της αρχής και από την τεταγμένη του τέλους την τεταγμένη της αρχής .

Αν Α($x_1 y_1$) και Β (x_2,y_2) τότε $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$, $\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$ και

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1)}$$

23. Ποιος είναι ο τύπος του μέτρου ενός διανύσματος ;

i) Στην περίπτωση που το διάνυσμα είναι διάνυσμα θέσης πχ $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ τότε προβάλλουμε το τέλος Α στους άξονες x’x, y’y και εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα . Δηλαδή:



Άρα $(OA_1)=|x|$, $(OA_2)=|y|$ και από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $O\overset{\Delta}{A}A_1$ έχουμε

$$|\vec{\alpha}|^2=(\mathrm{OA_1})^2+(\mathrm{A_1A})^2=(\mathrm{OA_1})^2+(\mathrm{OA_2})^2=|x|^2+|y|^2=x^2+y^2$$

ή $$\boxed{|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}}$$

ii) Στην περίπτωση που το διάνυσμα δεν είναι διάνυσμα θέσης αλλά ένα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ με συν/νες (x_2-x_1, y_2-y_1) και πάλι μπορούμε να εφαρμόσουμε τον παραπάνω τύπο αφού μπορούμε πάντα να « μεταφέρουμε » ένα διάνυσμα στην αρχή (ελεύθερο διάνυσμα) . Έτσι έχουμε:

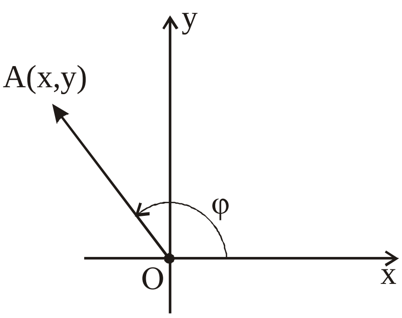
$$\boxed{|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=(AB)}$$

που είναι και η απόσταση των 2 σημείων Α και Β.

24. Πως εκφράζεται η // των διανυσμάτων με τις συντεταγμένες ;

Έστω $\vec{a},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε αποδεικνύεται η ισοδυναμία $\vec{a}\,//\,\vec{\beta}\Leftrightarrow \det(\vec{a},\vec{\beta})=0$ όπου $\det(\vec{a},\vec{\beta})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=x_1y_2-y_1x_2$ (ορίζουσα συνταγμένων).

25. i) Τι ονομάζουμε γωνία διανύσματος με x'x, ii) πως ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος και iii) ποια η σχέση του με την // των διανυσμάτων ;



i) Έστω $\vec{a}=(x,y)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα του επιπέδου. Θα ονομάζουμε γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{a}$ με τον άξονα x'x την γωνία φ όταν αυτή προκύπτει από την περιστροφή του Ox γύρω από το O κατά την θετική φορά (αντίθετα από το ρολόι) και μέχρι να συμπέσει με το διάνυσμα για την γωνία αυτή πρέπει να ισχύει $0\le\phi<2\pi$

ii) Αν για το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x,y)$ ισχύει x$\neq 0$ (δηλαδή δεν είναι // με y'y) τότε το πηλίκο $\boxed{\lambda=\dfrac{x}{y}}$

το ονομάζουμε συν/νη διεύθυνσης του $\vec{a}$.

Από τριγωνομετρία είναι φανερό ότι ισχύει . $\boxed{\lambda = \varepsilon\varphi\phi}$

Σχόλιο : Για $\vec{\alpha} // x'x$ προκύπτει λ = 0 ενώ για $\vec{a} // y'y$ δεν ορίζεται .

iii) Έστω $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με $x_1 \neq 0$ και $x_2 \neq 0$ (άρα ορίζονται συντελεστές διεύθυνσης) τότε έχουμε $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

26. Τελικά πως αποδεικνύεται η // δύο διανυσμάτων ;

(Μεθοδολογία) Οι τρόποι που έχουμε μέχρι τώρα συναντήσει είναι οι εξής :

Με την εύρεση λ∈ ℝ τέτοιου ώστε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ (δίνει και φορά αφού αν λ > 0 είναι $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ ενώ αν λ < 0 τότε $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$

Με την βοήθεια της ορίζουσας εφόσον γνωρίζουμε συν/νες (δεν δίνει φορά)
$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$

Με την βοήθεια των συν/στών διευθύνσεις ***εφόσον ορίζονται*** (δεν δίνει φορά) $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$

Με την βοήθεια των μέτρων εφόσον γνωρίζουμε τις τιμές τους (δίνει και φορά) δηλαδή
$\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$
$\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big|$ (η απόδειξη αυτής της σχέσης χρειάζεται εσωτερικό γινόμενο)

Με την εύρεση της γωνίας τους ή του συνημιτόνου της γωνίας τους (δίνει και φορά) δηλαδή
$\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 1$
$\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \pi \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = -1$ (η χρήση αυτής της μεθόδου απαιτεί εσωτερικό γινόμενο

27. Πως ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων ;

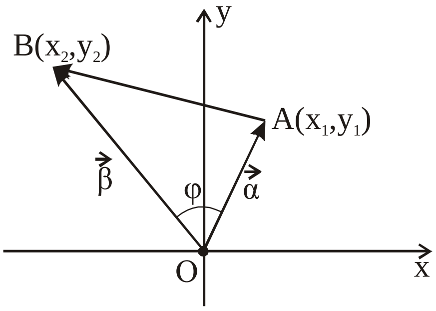
Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δυο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό
$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \sigma\upsilon\nu\phi$, $\begin{pmatrix} \hat{\phi} = (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) \\ o \leq \phi \leq \pi \end{pmatrix}$.

Αν $\vec{\alpha} = \vec{o}$ ή $\vec{\beta} = \vec{o}$ τότε ορίζουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

28. Τι ονομάζεται αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινόμενου και πως υπολογίζεται ;

Η αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινόμενου είναι η έκφρασή του από τις συντεταγμένες των δύο διανυσμάτων. Αν έχουμε $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε θα αποδείξουμε ότι:

$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$



Έστω $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (x_1, y_1), \vec{\beta} = \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$ τότε εφαρμόζουμε νόμο συνημίτονων στο

$\overset{\Delta}{OAB}$ $(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB)\sigma\upsilon\nu\phi \quad (1)$

Όμως (AB) = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, $(OA) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = |\vec{a}|$

(OB) = $\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = |\vec{\beta}|$ άρα η σχέση (1) γίνεται

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2 \cdot |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \sigma\upsilon\nu\phi \Leftrightarrow$$

$$x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_2y_1 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow$$

$$-2(x_1x_2 + y_1y_2) = -2\vec{a}\vec{\beta} \Leftrightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2}$$

29. Τι γνωρίζουμε για το συνημίτονο της γωνίας δύο διανυσμάτων ;

Αν λύσουμε τον τύπο του εσωτερικού γινομένου ως προς το συνημίτονο προκύπτουν οι εκφράσεις :

$$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha}_1\overset{\wedge}{}\vec{\beta}\right) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Σχόλιο : Όπως έχουμε αναφέρει το συνημίτονο μας βοηθάει στην εύρεση // αλλα και γενικότερα στην εύρεση γωνίας (θα χρησιμοποιηθεί και στο επόμενο κεφάλαιο) .

30. Ποιες είναι οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου ;

Υπάρχουν και ιδιότητες που είχαμε μάθει στους πραγματικούς και δεν ισχύουν;

i) Άμεσες συνέπειες από τον ορισμό είναι οι εξής :

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

β) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

γ) $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$, $\quad \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

δ) $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$

Ενώ αποδεικνύονται οι ιδιότητες

ε) $\left(\lambda\vec{\alpha}\right)\vec{\beta} = \vec{\alpha}\left(\lambda\vec{\beta}\right) = \lambda\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right)$

ζ) $\vec{\alpha}\left(\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$

η) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda\vec{\alpha} \cdot \lambda\vec{\beta} = -1$ εφόσον $\vec{\alpha} \neq y'y$, $\vec{\beta} \neq y'y$

Απόδειξη

Έστω $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{\beta} = (x_2, y_2), \vec{\gamma} = (x_3, y_3)$ $\kappa\alpha\iota$ $\lambda \in \mathbb{R}$

ε) $\left(\lambda\vec{\alpha}\right)\vec{\beta} = \left(\lambda x_1, \lambda y_1\right)(x_2, y_2) = \left(\lambda x_1\right)x_2 + (\lambda y_1)y_2 = \lambda(x_1x_2) + \lambda(y_1y_2)$

$= \lambda\left(x_1x_2 + y_1y_2\right) = \lambda\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right)$ (ομοίως και για $\vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta})$)

ζ) $\vec{\alpha}\left(\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right) = (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3) = x_1(x_2 + x_3) + y_1\left(y_2 + y_3\right)$

$= \left(x_1x_2 + x_1x_3\right) + \left(y_1y_2 + y_1y_3\right) = \left(x_1x_2 + y_1y_2\right) + \left(x_1x_3 + y_1y_3\right)$

$= \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$

η) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1y_2 = -x_1x_2 \overset{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{y_1}{x_1} \cdot \dfrac{y_2}{x_2} = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda\vec{\alpha} \cdot \lambda\vec{\beta} = -1$

ii) Όμως πρέπει να γνωρίζουμε ότι κάποιες ιδιότητες που γνωρίζουμε δεν ισχύουν (τουλάχιστον παντού) δηλαδή :

α) $\vec{\alpha}\left(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}\right) \neq \left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right)\vec{\gamma}$ (προσεταιριστική)

β) $\left.\begin{matrix} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \\ \vec{\alpha} \neq \vec{o} \end{matrix}\right\} \not\Rightarrow \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ (νόμος διαγραφής)

γ) $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \neq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

δ) $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2 \neq \vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$

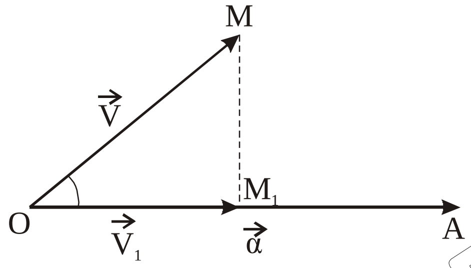
ε) οι ταυτότητες των κύβων (ενώ ισχύουν) όλες των τετραγώνων.

31. Πως αποδεικνύεται η καθετότητα δύο διανυσμάτων ;

Εφόσον τα διανύσματα δεν είναι μηδενικά αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ ή η γωνία τους είναι $\frac{\pi}{2}$ $\left(\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=0\right)$ ή $\lambda\vec{\alpha}\cdot\lambda\vec{\beta}=-1$ εφόσον όμως ορίζονται οι συν/στες.

Αν κάποιο από αυτά είναι μηδενικό είναι προφανές ότι είναι $\perp$.

32. Πως γίνεται η προβολή ενός διανύσματος πάνω σε άλλο διάνυσμα και ποια σχέση τα συνδέει ;



Έστω $\vec{\alpha},\vec{\nu}$ δύο διανύσματα με $\vec{\alpha}\neq\vec{o}$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το Ο (διαφορετικά τα κάνουμε εμείς) . Από το τέλος του Μ του $\vec{\nu}$ φέρνουμε κάθετη στον φορέα του $\vec{\alpha}$ και έστω M_1 το ίχνος της κάθετης . Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ θα λέγεται προβολή του $\vec{\nu}$ *στο* $\vec{\alpha}$ και θα συμβολίζεται με $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\nu}}$. Έχουμε ακόμα ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\nu}=\vec{\alpha}\cdot\left(\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M}\right)=$

$= \vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM_1}+\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{M_1M}=\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM_1}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\nu}}$

Μεθοδολογία

Η παραπάνω σχέση μας δίνει έναν τρόπο να λύνουμε ασκήσεις γεωμετρικές όπου εμφανίζονται καθετότητες. Ακόμα μας βοηθάει για να αναλύσουμε ένα διάνυσμα σε δύο κάθετες μεταξύ του συνιστώσες (η μία είναι η προβολή) .

Τέλος μια ένδειξη ότι η άσκηση χρειάζεται προβολές είναι όταν η σχέση που ζητάμε να αποδείξουμε περιέχει εσωτερικό γινόμενο συγ/κων διανυσμάτων με κοινή αρχή .